FACULDADES ANHANGUERA

Universidade Anhanguera

Curso: Engenharias

Disciplina: Cálculo III *Campus: Campo Limpo*

Profª Ms. Regina Thaíse Bento

Lista 6- Aplicações da Integral Definida

Aplicações da Integral Definida

1. Comprimento de arcos

O que queremos dizer com o comprimento de uma curva? Podemos pensar em colocar um pedaço de barbante sobre a curva, e então medir o comprimento do barbante com uma régua. Mas isso pode ser difícil de fazer com muita precisão se tivermos uma curva complicada. Precisamos de uma definição para o comprimento de um arco de curva, da mesma maneira como desenvolvemos definições para os conceitos de área, e futuramente para o volume.

Se a curva é um polígono, podemos facilmente encontrar seu comprimento; apenas somamos os comprimentos dos segmentos de reta que forma o polígono. (Podemos usar a fórmula de distância para encontrar a distância a distância entre os extremos de cada segmento.) Definiremos o comprimento de uma curva geral primeiro aproximando-a por um polígono e então tomando o limite quando o número de segmentos do polígono aumenta. Esse processo é familiar para o caso de um círculo, onde a circunferência é o limite dos comprimentos dos polígonos inscritos. (ver figura 1)

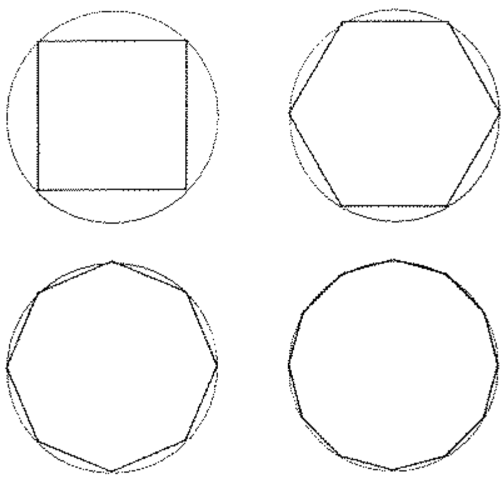


Figura 1

Agora suponha que uma curva C seja definida pela equação y = *f*(x), onde *f* é contínua e $a \leq x \leq b$. Obtemos um polígono de aproximação para C dividindo o intervalo [a, b] em n subintervalos com os extremos $x_0, x_1, ..., x_n$ e com larguras iguais a Δx.

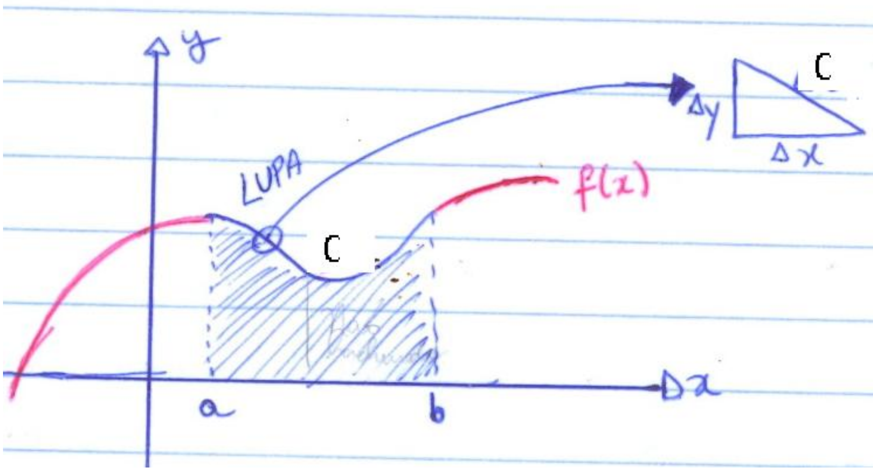


Figura 2

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\Delta^2 C = \Delta^2 y + \Delta^2 x$$

$$\left(\frac{\Delta C}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + 1$$

Aplicando o limite quando $\Delta x \to 0$, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta C}{\Delta x}\right)^2 = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + 1\right]$$

$$\left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta C}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

$$\left(\frac{dC}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{dC}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\int_a^b \frac{dC}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx \quad \textbf{(Notação de Leibniz)}$$

ou

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Determine o comprimento do arco definido pela curva da função $f(x) = x + 2$, no intervalo [1, 4].

Resolução:

Temos que $f'(x) = 1$. Então:

$$C = \int_1^4 \sqrt{1 + (1)^2}\ dx = \int_1^4 \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2} \bullet x\Big|_1^4$$

$$C = \sqrt{2} \bullet (4 - 1) = 3\sqrt{2} \text{ u.c.}$$

Exemplo 2: Determine o comprimento do arco definido pela curva da função $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, no intervalo [0, 1].

Resolução:

Temos que $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} = \frac{2}{3}x \bullet x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

Então a função derivada é:

$$y' = \frac{2}{3} \bullet \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}}$$

Logo:

$$C = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx = \int_0^1 (1 + x)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$u = 1 + x \qquad u_s = 1 + 1 = 2$

$\frac{du}{dx} = 1$ $\qquad u_i = 1 + 0 = 1$

$du = dx$

Então:

$$C = \int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\,dx = \left.\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^2 = \left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^2 = \left.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right|_1^2$$

$$C = \int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right) \text{ u.c.}$$

Exemplo 3: Determine o comprimento do arco definido pela curva da função $y = x^{\frac{3}{2}}$, no intervalo [1, 4].

Resolução:

Temos que $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

Logo:

$$C = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \int_1^4 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$u = 1 + \frac{9}{4}x$ $\qquad u_s = 1 + \frac{9}{4}x = 1 + \frac{9}{4} \bullet 4 = 1 + 9 = 10$

$\frac{du}{dx} = \frac{9}{4}$ $\qquad u_i = 1 + \frac{9}{4}x = 1 + \frac{9}{4} \bullet 1 = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$

$\frac{4}{9}du = dx$

Então:

$$C = \int_{13/4}^{10} u^{\frac{1}{2}} \bullet \frac{4}{9}\,du = \left.\frac{4}{9} \bullet \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right|_{13/4}^{10}$$

$$C = \frac{8}{27}\left[10^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}\right) \text{ u.c.}$$

$C \approx 7{,}63$ u.c.

Exercícios

1) Determine a medida do comprimento do arco, nos intervalos dados:

a) $y = 2x + 1$ em $[1, 6]$

b) $y = e^x + e^{-x}$ em $[0, 1]$

c) $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$, em $[1, 2]$

d) $y = 4x^{\frac{3}{2}}$, em $[1, 8]$

e) $y = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{8x^2}$, em $[1, 2]$

f) $y = 3x - 10$, em $[1, 5]$

g) $y = \ln(\sec x)$, em $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$

2. Volume de Sólidos de Revolução

A definição de área de uma região plana nos levou à definição da integral definida. No desenvolvimento, usamos a fórmula para a área de um retângulo, da Geometria Plana. Usamos um processo similar para obter volume de determinados tipos de sólidos. Um deles e um **cilindro reto.**

Um sólido será um **cilindro reto** se for limitado por duas regiões planas congruentes R_1 e R_2, situadas em planos paralelos e por uma superfície lateral gerada por um segmento de reta, tendo seus extremos sobre os limites R_1 e R_2 (ver figura 3). A altura do cilindro é a distância perpendicular entre os planos de R_1 e R_2 e a base é R_1 ou R_2. Se a base do cilindro reto for uma região encerrada por um retângulo, teremos um **paralelepípedo retângulo** (ver figura 4), e se a base for uma região encerrada por um círculo, temos um **cilindro circular reto** (ver figura 5).

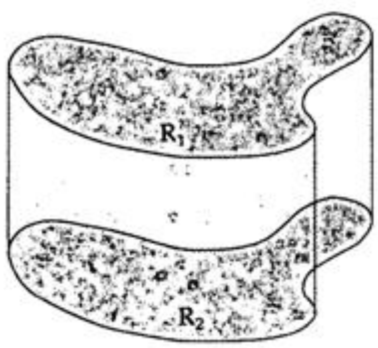


Figura 3

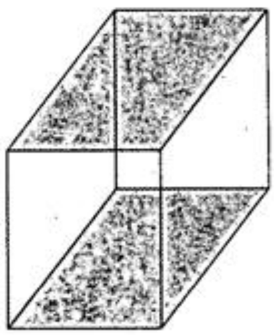


Figura 4

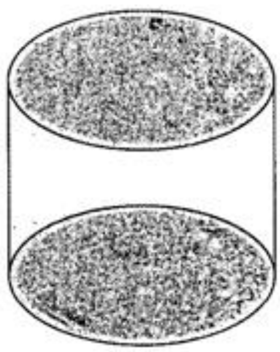


Figura 5

Se a área da base um cilindro reto for A unidades quadradas e a altura for h unidades, então, da geometria dos sólidos, se V unidades cúbicas for o volume, então V = Ah.

Usaremos essa fórmula para obter um método de calcular a medida do volume de um sólido para o qual a área de qualquer secção plana (uma região plana formada pela intersecção de um plano com o sólido) que é perpendicular a um eixo, seja uma função da distância perpendicular da secção plana de um ponto fixo sobre o eixo x.

A figura 4 mostra tal sólido S que se situa entre planos perpendiculares ao eixo x em a e b. Seja A(x) unidades quadradas a área da secção plana de S que é perpendicular ao eixo x em x. Exigimos que A seja contínua em [a, b].

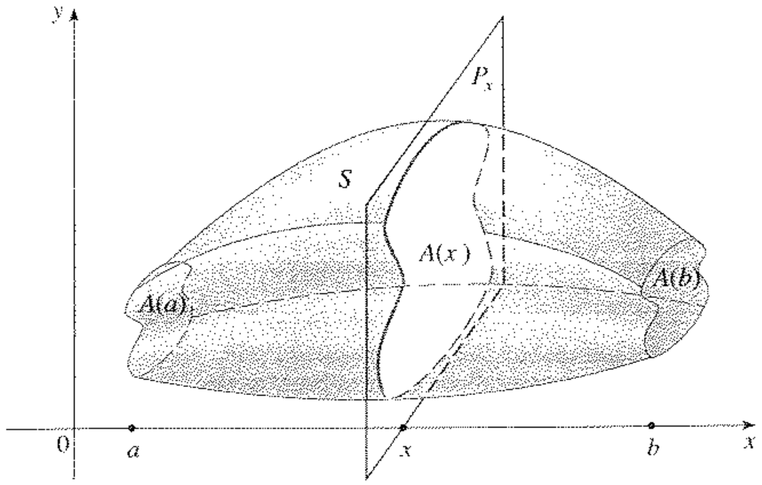


Figura 6

Dada uma região R plana e uma linha reta, ou eixo, que pode tocar (ver figura 7) ou não (ver figura 8) em R e que esteja no mesmo plano de R. Girando-se R em torno deste eixo, forma-se uma região no espaço tridimensional denominada **sólido de revolução**.

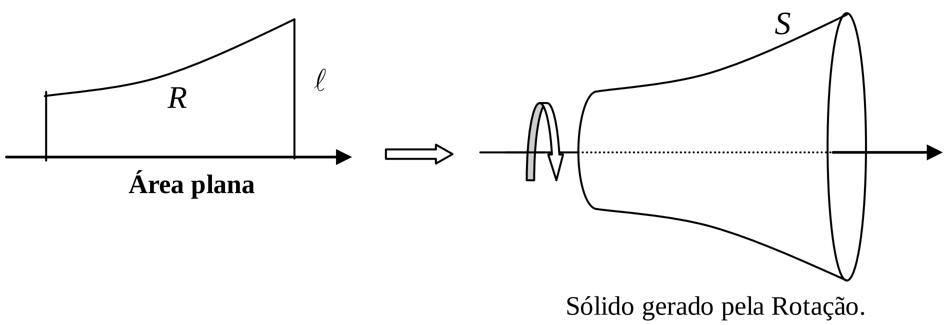


Figura 7

b)

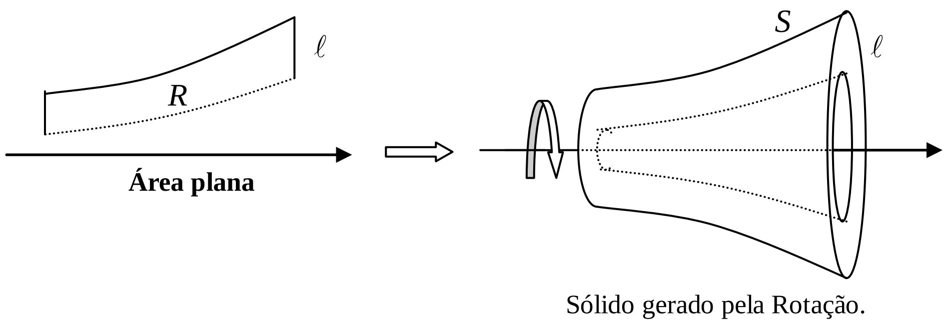
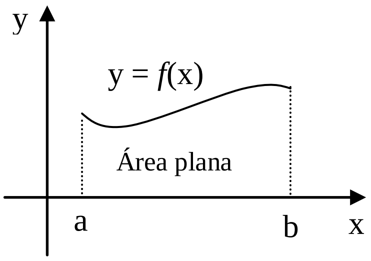


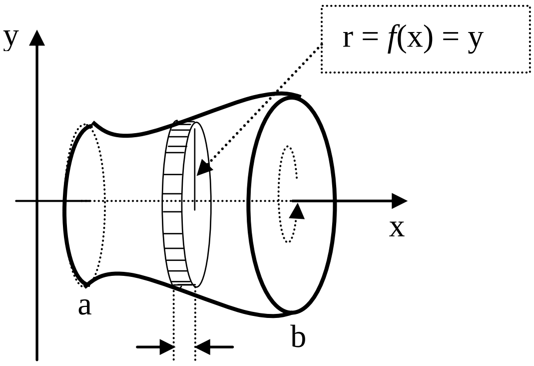
Figura 8

3. Método do Disco

3.1. Revolução em torno do eixo x

Girando o gráfico de uma função $f(x)$ em torno do eixo x temos:



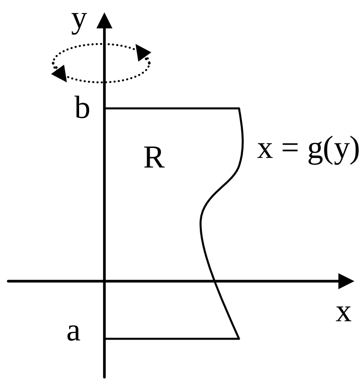


Cálculo do elemento de volume

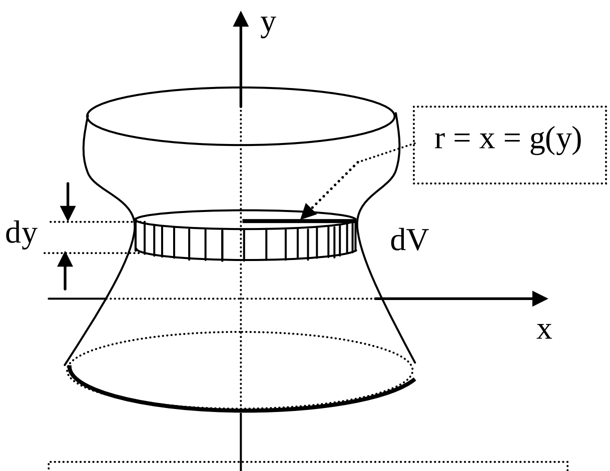
$$dV = \pi r^2 h \quad \rightarrow \quad dV = \pi\left[f(x)\right]^2 dx \quad \rightarrow \quad V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

3.2. Revolução em torno do eixo y

Uma região plana pode ser girada em torno do eixo y ao invés do eixo x, e novamente um sólido de revolução será gerado.



Área plana girando em y



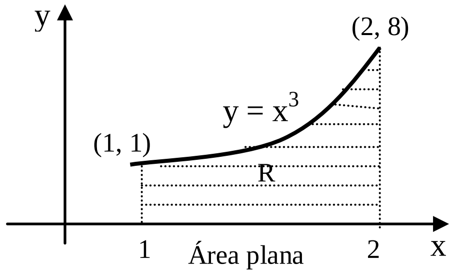
Sólido de revolução da área plana em torno de y

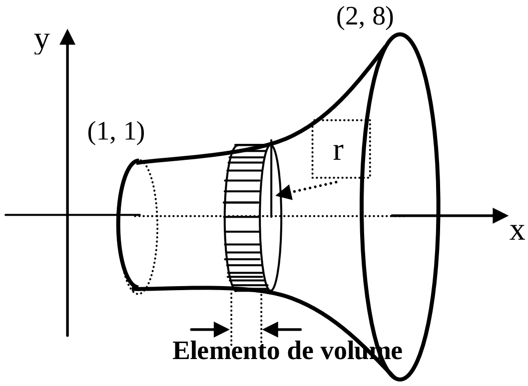
$$V = \pi\int_a^b \left[g(y)\right]^2 dy = \pi\int_a^b r^2 dy$$

Vejamos dois exemplos:

Exemplo 1: Usando o método do disco, calcule o volume do sólido gerado pela revolução da região sob a função $y = x^3$, no intervalo [1, 2], em torno do eixo x.

Resolução:



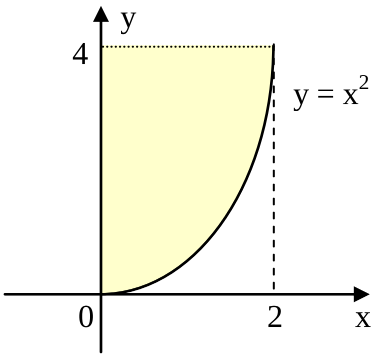


$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\ dx = \pi\int_1^2 \left(x^3\right)^2\ dx = \pi\int_1^2 x^6\ dx$$

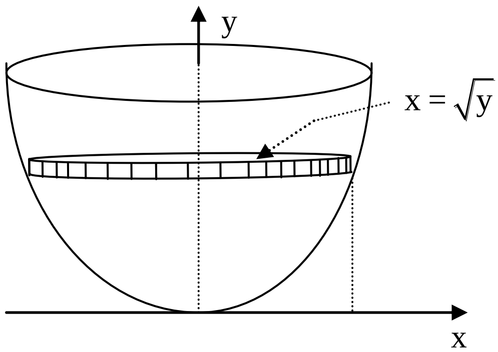
$$V = \pi \bullet \left.\frac{x^7}{7}\right|_1^2 = \frac{\pi}{7} \bullet \left(2^7 - 1^7\right) = \frac{\pi}{7} \bullet (128 - 1) = \frac{127}{7}\pi \ \text{ u.v.}$$

Exemplo 2: Calcule o volume gerado pela parábola $y = x^2$ girando em torno do eixo de y, no intervalo [0, 4].

Resolução:



Seção plana parábola girando em y



Sólido gerado pela Parábola de revolução

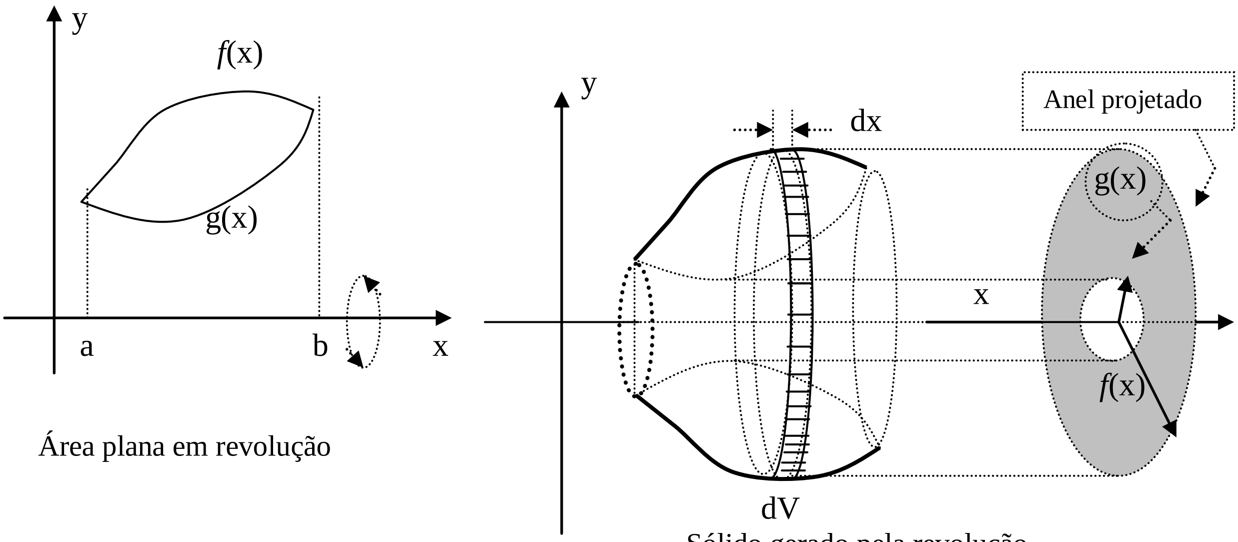
$$V = \pi\int_a^b [g(y)]^2\ dx = \pi\int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2\ dy = \pi\int_0^4 y\ dy$$

$$V = \pi \bullet \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^4 = \frac{\pi}{2} \bullet \left(4^2 - 0^2\right) = \frac{16\pi}{2} = 8\pi \ \text{ u.v.}$$

4. Método dos Anéis Circulares

O **Método do Disco** pode ser estendido para o **Método dos Anéis Circulares**. Este método surge quando a área de revolução é limitada por duas funções $f(x)$ e $g(x)$, tal que $f(x) > g(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

4.1. Revolução em torno do eixo x



Sólido gerado pela revolução

O elemento de volume do anel é dado por:

$$dV = \pi\,[f(x)]^2\,dx - \pi\,[g(x)]^2\,dx = \pi\left\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\right\}dx$$

de forma que o volume todo é dado por:

`

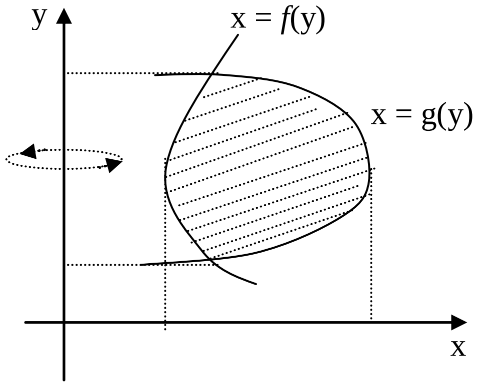
$$V = \int_a^b dV = \pi\int_a^b \left\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\right\}dx$$

Note que o vão interno é descontado pela subtração dos dois volumes.

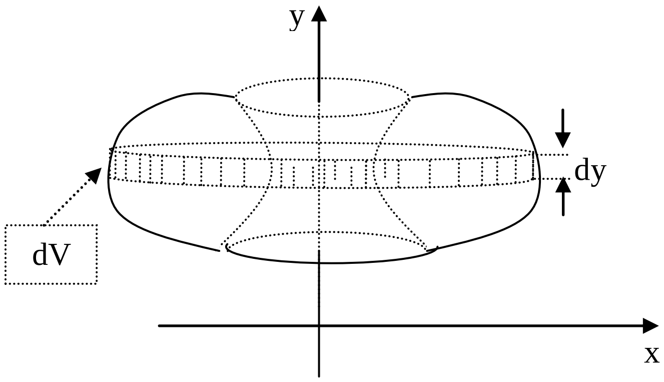
4.2. Revolução em torno do eixo y

Se a revolução for em torno do eixo y, como por exemplo para as funções x = *f*(y) e x = g(y), tem-se:

$$dV = \pi \left\{ \left[f(y) \right]^2 - \left[g(y) \right]^2 \right\} dy$$



Área entre curvas, em revolução



Sólido gerado pela área em revolução

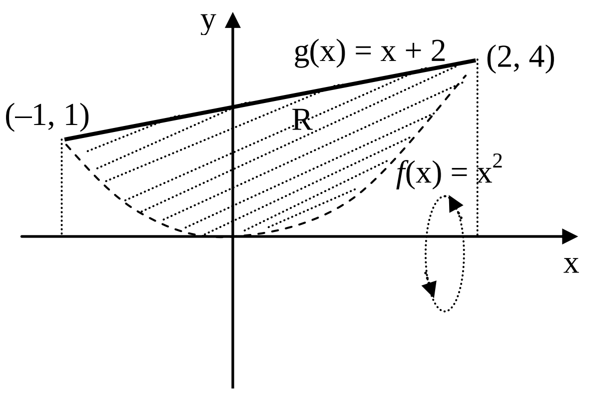
de forma que o volume todo é dado por:

$$V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b \left\{ \left[f(y) \right]^2 - \left[g(y) \right]^2 \right\} dy$$

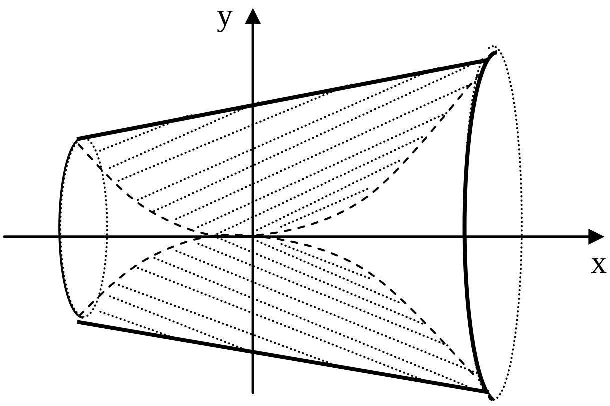
Vejamos dois exemplos:

Exemplo 3: Calcular, usando o método dos anéis circulares, o volume formado pela rotação da região entre $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 2$, em torno do eixo x.

Resolução:



Área entre parábola e reta.



Sólido de revolução

Pontos de Interseção:

$f(x) = g(x)$

$x + 2 = x^2$

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -1 & \Rightarrow \quad y_1 = 1 \\ x_2 = 2 & \Rightarrow \quad y_2 = 4 \end{cases}$$

O volume será:

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left[(x+2)^2 - (x^2)^2 \right] dx = \pi \int_{-1}^{2} \left[(x^2 + 4x + 4) - (x^4) \right] dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left[x^2 + 4x + 4 - x^4 \right] dx = \pi \bullet \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_{-1}^{2}$$

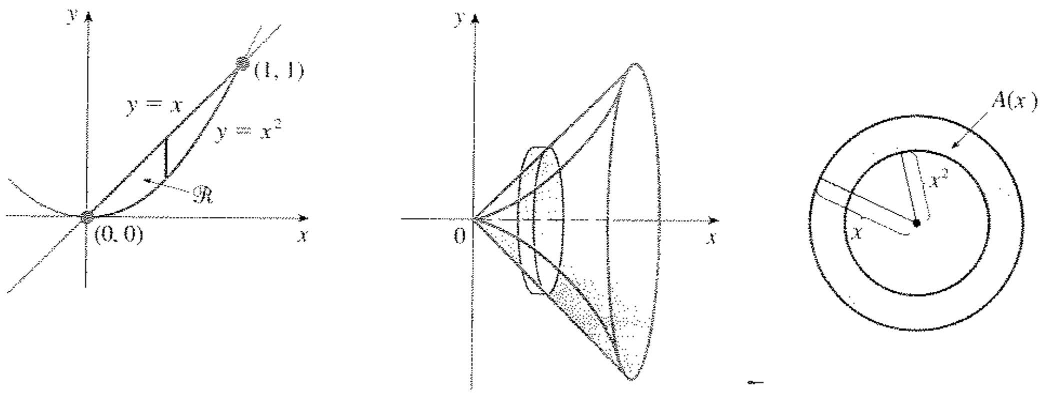
$$V = \pi \bullet \left[\left(\frac{8}{3} + 8 + 8 - \frac{32}{5} \right) - \left(\frac{-1}{3} + 2 - 4 + \frac{1}{5} \right) \right]$$

$$V = \pi \bullet \left[\left(\frac{184}{15} \right) - \left(-\frac{32}{15} \right) \right] = \pi \bullet \left[\frac{184}{15} + \frac{32}{15} \right]$$

$$V = \frac{216}{15}\pi = \frac{72}{5}\pi \text{ u.v.}$$

Exemplo 4: A região R, limitada pelas curvas y = x e y = x^2, é girada ao redor do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.

Resolução:



Pontos de Interseção:

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 & \Rightarrow \quad y_1 = 0 \\ x_2 = 1 & \Rightarrow \quad y_2 = 1 \end{cases}$$

O volume será:

$$V = \pi \int_0^1 \left[(x)^2 - (x^2)^2 \right] dx = \pi \int_0^1 \left[x^2 - x^4 \right] dx$$

$$V = \pi \bullet \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1$$

$$V = \pi \bullet \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - (0) \right]$$

$$V = \frac{2}{15} \pi \text{ u.v.}$$

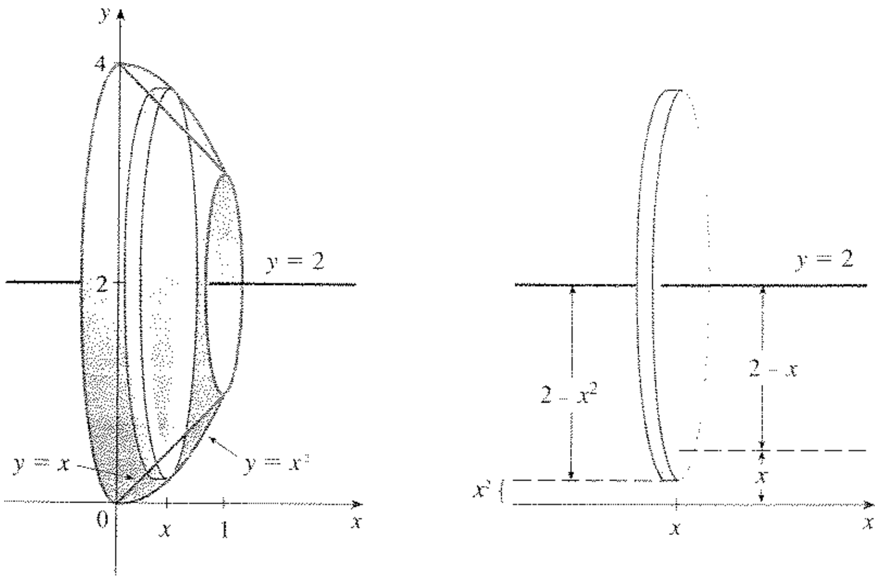
Às vezes, o sólido de revolução é gerado em torno de um eixo externo que pode ser paralelo a “x” ou a “y”. O método dos anéis circulares pode ser aplicado, desde que se identifique o raio do giro.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 5: A região R, limitada pelas curvas y = x e y = x^2, é girada em torno da reta y = 2. Determine o volume do sólido resultante.

Resolução:

O sólido e a secção transversal são mostrados abaixo. A secção transversal é uma arruela, mas dessa vez o raio interno é 2 – x e o raio externo é 2 – x^2.



O volume será:

$$V = \pi \int_0^1 \left[(2-x^2)^2 - (2-x)^2 \right] dx = \pi \int_0^1 \left[(4 - 4x^2 + x^4) - (4 - 4x + x^2) \right] dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left[4 - 4x^2 + x^4 - 4 + 4x - x^2 \right] dx = \pi \int_0^1 \left[x^4 - 5x^2 + 4x \right] dx$$

$$V = \pi \bullet \left(\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 2x^2 \right) \Bigg|_0^1$$

$$V = \pi \bullet \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 2 \right) - (0) \right]$$

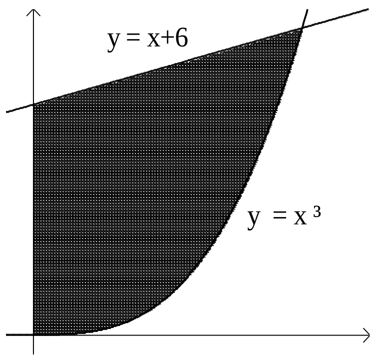
$$V = \frac{8}{15} \pi \text{ u.v.}$$

Exercícios

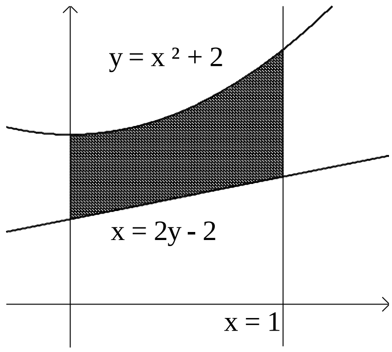
2) Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela curva $y = \frac{1}{4}x^2$, com x = 0 e x = 4.

3) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação das regiões dadas, em revolução em torno do eixo x.

a)



b)



4) A região R, limitada pelas curvas y = x e $y = x^2$, é girado em torno da reta x = –1. Determine o volume do sólido gerado.

5) Determine o volume do sólido obtido das regiões limitadas com a rotação em torno da reta dada:

a) $y = 2x^2$, y = 0, x = 0, x = 5; em torno do eixo x.
b) $y = x^3$, y = 0, x = 2; em torno da reta y = 8.
c) $y = 2 - \frac{1}{2}x$, y = 0, x = 1, x = 6; em torno do eixo x.
d) $y = \frac{1}{x}$, x = 1, x = 2, y = 0; em torno do eixo x.
e) $y = \frac{x^2}{4}$, x = 0, x = 6; em torno do eixo y.
f) $y = x^3$, y = x, $x \geq 0$; em torno do eixo x.
g) $y = x^3$, y = x, $x \geq 0$; em torno do eixo y.

6) Utilizando integral definida, prove que o volume de uma esfera de raio *r* é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

7) Determine o volume do sólido obtido das regiões limitadas com a rotação em torno do eixo x:

a) $y = (2x - 3)^6$ em [0, 1].

b) $y = e^x + 1$ em [0, 1].

c) $y = \sec x \, . \, \sqrt{\operatorname{tg} x}$ em $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$.

d) $y = xe^{x^3}$ em [1, 2].

e) $y = e^x\sqrt{e^x + 1}$ em [0, 1].

f) $y = e^{2\sqrt{x}}$ em [1, 3].

g) $y = x^{\frac{1}{2}} \, . \, \left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{4}}$ em $\left[0,\ \sqrt{3}\right]$.

h) $y = x^4\left(x^9 + 1\right)^{\frac{3}{2}}$ em [0, 1].

8) Determine o volume do sólido de revolução formado pela rotação da área limitada pela curva $f(x) = 3 - x^2$ e a reta $g(x) = 2$, em torno do eixo x.

9) Determine o volume do sólido formado pela rotação da área limitada por $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = 3x$, em torno do eixo x.

10) A região limitada pela parábola cúbica $y = x^3$ e pela reta $y = 8$, gira em torno do eixo y. Determine o volume gerado.

11) Determine o volume gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $f(x) = 13 - x^2$ e a reta $g(x) = 2x + 5$.

Respostas

Aplicações da Integral Definida

1a) $5\sqrt{5}$ u.c.

b) $e+\dfrac{1}{e}-2$ u.c.

c) $\dfrac{17}{12}$ u.c.

d) $\dfrac{1}{54}\left(289^{\frac{3}{2}}-37^{\frac{3}{2}}\right)$ u.c.

e) $\dfrac{123}{32}$ u.c.

f) $4\sqrt{10}$ u.c.

g) $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ u.c.

2) $\dfrac{64}{5}\pi$ u.v.

3a) $\dfrac{1\,688}{21}\pi$ u.v.

b) $\dfrac{79}{20}\pi$ u.v.

4) $\dfrac{\pi}{2}$ u.v.

5a) 2500π u.v.

b) $\dfrac{576}{7}\pi$ u.v.

c) $\dfrac{35}{12}\pi$ u.v.

d) $\dfrac{\pi}{2}$ u.v.

e) 162π u.v.

f) $\dfrac{4}{21}\pi$ u.v.

g) $\dfrac{4}{15}\pi$ u.v.

6) Demonstração

7a) $\dfrac{\pi}{26}\left(3^{13}-1\right)$ u.v.

b) $\pi\left(\dfrac{e^2}{2}-2e-\dfrac{3}{2}\right)$ u.v.

c) $\dfrac{\pi}{2}$ u.v.

d) $\dfrac{\pi}{6}\left(e^6-e^2\right)$ u.v.

e) $\dfrac{\pi}{6}\left(2e^3+3e^2-5\right)$ u.v.

f) $\dfrac{\pi}{4}\left(e^{12}-e^4\right)$ u.v.

g) $\dfrac{7}{3}\pi$ u.v.

h) $\dfrac{5}{12}\pi$ u.v.

8) $\dfrac{32}{5}\pi$ u.v.

9) $\dfrac{22}{15}\pi$ u.v.

10) $\dfrac{96}{15}\pi$ u.v.

11) $\dfrac{5684}{25}\pi$ u.v.